תורת הקבוצות, תרגיל 1

1. ההפרש הסימטרי בין קבוצות a,b מוגדר ע"י $a\triangle b=(a\cup b)\setminus(a\cap b)$. הקבוצה המשלימה A^c של קבוצה A מוגדרת ע"י ($x\in A^c$ אם ורק אם $x\notin A$).

   הוכח או הפרך את הטענות הבאות: לכל הקבוצות A,B,C קיים:

   א. $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$.

   ב. $A\triangle B=(A\cup B^c)\cap(B\cup A^c)$.

   ג. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$

   ד. אם $A\cup C=B\cup C$ אז $B=C$.

2. לקבוצה $\{B\mid B\subseteq A\}$, שהיא קבוצת תתי-הקבוצות של הקבוצה A אנו קוראים **קבוצת החזקה** של A ונסמן אותה ב- $\mathbf{P}(A)$.

   א. הוכח כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\cap\mathbf{P}(B)$.

   ב. הוכח כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $\mathbf{P}(A)\cup\mathbf{P}(B)\subseteq\mathbf{P}(A\cup B)$. מצא תנאי הכרחי ומספיק לשיוויון.

   ג. מצא את $\mathbf{P}(\{0,\emptyset,\{\emptyset\}\})$.

3. נקרא לקבוצה A **טרנזיטיבית** אם כל איבר של A הוא תת-קבוצה של A,
   כלומר, לכל x קיים $x\in A\Rightarrow x\subseteq A$.

   א. תן דוגמא לקבוצה טרנזיטיבית ולקבוצה שאינה טרנזיטיבית. (רמז: השתמש ב-$\{\emptyset\}$).

   ב. הוכח שקבוצה A היא טרנזיטיבית אםם $A\subseteq\mathbf{P}(A)$.

   ג. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $\mathbf{P}(A)$ טרנזיטיבית.

   ד. הוכח שאם A טרנזיטיבית אז $A\cup\{A\}$ טרנזיטיבית.

   ה. הוכח שלכל מספר טבעי n קיימת קבוצה טרנזיטיבית בת n איברים.

   ו. מצא דוגמא לקבוצה טרנזיטיבית A כך שלא כל קבוצה שהיא איבר של A היא קבוצה טרנזיטיבית.

4. הוכח על סמך האקסיומות של תורת הקבוצות את הטענות הבאות:

   א. אם a,b קבוצות אז גם $a\cup b$ קבוצה.

   ב. אם a,b קבוצות אז גם $a\triangle b$ קבוצה.

   ג. לא קיימת קבוצה x עבורה $x\in x$.

5. בנה "קבוצה" נוספת (לא זו שהוצגה בשעור) עבורה מתקבל פרדוקס הדומה לפרדוקס של Russell.

תאריך ההגשה: 9.11.2005